Heaviside の演算子法の概要

宮原邦幸
熊本大学名誉教授

はじめに

微積分方程式、特に定数係数常微積分方程式を代数方程式に直して解を求める Laplace 変換は非常に有力な手法で、制御理論や信号処理のなどの分野では最も基本的な道具の１つになっている。この手法の原点が Heaviside が考え出した演算子法にあることはよく知られていることである。しかし多くの教科書には、初期値が０でない問題にこの Heaviside が考え出した演算子法を適用した場合、計算の仕方により異なった答が得られるなど、この方法は数学的には不備のある手法である、と書いてある。この曖昧さを無くし、数学的に整備した手法が Laplace 変換というわけで、確かに、微分操作を Heaviside の演算子と定義すればそのとおりであるが、Heaviside の演算子 p として定積分演算の逆演算操作と定義し直しさえすれば、数学的に曖昧さのない演算子法を構築することができる。ここでは、そのようにして構築された Heaviside の演算子法について概説する。

※低温工学と直接的には関係がないことについてはどうかご容赦願いたい。

１．定積分演算子とその逆演算子

被演算関数 $\tilde{f}(t) = f(t)u(t)$ は区分的に任意の階数微分可能な関数とし、時間関数と呼ぶこととする。ここで $u(t)$ は

$$u(t) = 0 \quad (t < 0), \quad u(t) = 1 \quad (0 < t)$$

（ここで１は１という数値）　　(1.1)

という値をとる Heaviside の単位階段関数で、以後、単位階段関数、または単位時間関数と呼び、簡単のため $\mathbf{1}$ と略記する。さらに $\tilde{f}(t) = f(t)u(t)$ における $u(t) = \mathbf{1}$ を記すことは省略し、ただ単に $f(t)$ と記し、$f(t)$ が定数 a の場合にのみ $a \cdot \mathbf{1}$ または $a\mathbf{1}$ と記す。

定積分演算子 p^{-1} を次式で定義し、その逆演算子を p とし、Heaviside の演算子と呼ぶ。つまり

$$p^{-1} f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \quad 、 \tag{1.2}$$

$$p^{-1}p = pp^{-1} = 1 \quad 、 \tag{1.3}$$

である。従って $p^{-1} = 1/p$ と書くことができ、この演算子 p を使った演算操作を Heaviside の演算子法と名付ける。ここで１は単位演算子である。

２．微分演算

微分演算は Heaviside の演算子 p を用いて次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= pp^{-1} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= p\int_0^t \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= p\{f(t) - f(0)\mathbf{1}\} \\ &= pf(t) - pf(0)\mathbf{1}。 \end{aligned} \tag{2.1}$$

この操作を繰り返せば

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = p^n f(t) - \sum_{\nu=0}^{n-1} p^{n-\nu} f^{(\nu)}(0)\mathbf{1} \tag{2.2}$$

となる。これらの式を

$$pf(t) = \frac{d}{dt} f(t) + pf(0)\mathbf{1}、 \tag{2.3}$$

$$p^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) + \sum_{\nu=0}^{n-1} p^{n-\nu} f^{(\nu)}(0)\mathbf{1} \tag{2.4}$$

の様に書き直すと判るように、p は擬似微分演算子と見なすことができる。

３．時間関数の演算子表示

多くの時間関数は単位時間関数 $\mathbf{1}$ に Heaviside の演算子 p の関数の形で表示される演算子（以下この演算子の関数をその時間関数に対する演算子表示と呼ぶことにする）を演算することによって得られる。以下、いくつかの初等関数で与えられる時間関数に対する演算子表示を求める。

$$pe^{at} = \frac{d}{dt} e^{at} + p[e^{at}]_{t=0} = ae^{at} + p\mathbf{1} \tag{3.1}$$

となる（a は定数）ので、これを整理すれば

$$e^{at} = \frac{p}{p-a}\mathbf{1} \tag{3.2}$$

が得られる。この両辺をパラメータ a で n 回微分すれば

$$t^n e^{at} = \frac{n!\,p}{(p-a)^{n+1}}\mathbf{1} \tag{3.3}$$

が得られる。 a が 0 の場合は

$$t^n = \frac{n!}{p^n}\mathbf{1} \tag{3.4}$$

となる。n が自然数とは限らず、正の実数 β の場合に拡張すれば、

$$t^\beta e^{at} = \frac{\Gamma(\beta+1)\,p}{(p-a)^{\beta+1}}\mathbf{1} \tag{3.5}$$

$$t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)\,p}{p^{\beta+1}}\mathbf{1} \tag{3.6}$$

が成立する。ここで $\Gamma(\lambda)$ はガンマ関数である。さらに、n が 0 であれば

$$\mathbf{1}(=u(t)) = 1\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1} \tag{3.7}$$

となる。（ここで、中辺の最初の 1 は単位演算子で、以下表記を省略する。2 番目の $\mathbf{1}$ は演算子の関数に演算される単位時間関数 $u(t)$ で、この $\mathbf{1}$ は省略しない。左辺及び右辺の $\mathbf{1}$ も単位時間関数である。）式（3.2）における定数 a が複素数の場合、Euler の公式を使って整理し、実数表示すれば、

$$e^{at}\sin bt = \frac{bp}{(p-a)^2+b^2}\mathbf{1} \tag{3.8}$$

$$e^{at}\cos bt = \frac{p(p-a)}{(p-a)^2+b^2}\mathbf{1} \tag{3.9}$$

（b も定数）が得られる。

4．演算子関表示の時間関数表示

演算子表示 $H(p)$ が演算子 p の有理型関数の場合、つまり $H(\overline{p})$ の特異点が m_k 位の極 p_k $(k=1,\cdots n)$ のみの場合（ここで $\overline{p}$ は複素数）

$$\begin{aligned} H(\overline{p}) &= \overline{p}F(\overline{p}) \\ &= \frac{\overline{p}Q(\overline{p})}{P(\overline{p})} \\ &= \frac{\overline{p}Q(\overline{p})}{\prod_{k=1}^{n}(\overline{p}-p_k)^{m_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m_k} F_{k,\ell}\cdot\frac{\overline{p}}{(\overline{p}-p_k)^\ell} \end{aligned} \tag{4.1}$$

但し、

$$F_{k,\hbar} = \left[\frac{1}{(m_k-\ell)!}\frac{d^{m_k-\ell}}{d\overline{p}^{m_k-\ell}}\left\{(\overline{p}-p_k)^{m_k}F(\overline{p})\right\}\right]_{\overline{p}=p_k} \tag{4.2}$$

と部分分数に展開することができる。ここで、

$$\lim_{|\overline{p}|\to\infty} H(\overline{p}) < \infty \tag{4.3}$$

であるとする。この演算子表示を単位時間関数に演算すると

$$\begin{aligned} H(p)\mathbf{1} &= pF(p)\mathbf{1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m_k} F_{k,\ell}\cdot\frac{p}{(p-p_k)^\ell}\mathbf{1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m_k} F_{k,\ell}\frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!}e^{p_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(\overline{p})e^{\overline{p}t}d\overline{p} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{H(\overline{p})}{\overline{p}}e^{\overline{p}t}d\overline{p} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。ここで、積分路 C は複素数 $\overline{p}$ に対して $H(\overline{p})/\overline{p}$ 、つまり $F(\overline{p})$ の全ての極を囲む積分路である。以後、ここで導入した、演算子表示 $H(p)$ を演算子 p で割って得られる演算子の関数 $F(p)$ を、対応する時間関数に対する演算子関数と呼ぶことにする。

5．移動演算子（指数関数） $\gamma^\lambda\ (=e^{-\lambda p})$

時間関数 $f(t)=f(t)u(t)$ に対して

$$\gamma^\lambda f(t) = \gamma^\lambda f(t)u(t) = f(t-\lambda)u(t-\lambda) \tag{5.1}$$

という様に、時間を λ $(\lambda\geq 0)$ だけずらす演算子を移動演算子 γ^λ とすると

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda\gamma^\mu f(t) &= \gamma^\lambda f(t-\mu)u(t-\mu) \\ &= f(t-\lambda-\mu)u(t-\lambda-\mu) \\ &= \gamma^{\lambda+\mu}f(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

となるので、移動演算子に対しては

$$\gamma^\lambda\gamma^\mu = \gamma^{\lambda+\mu} \tag{5.3}$$

の関係式が成立する。さらに、この演算子を単位時間関数に演算した場合、

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda\mathbf{1} &= \gamma^\lambda u(t) = u(t-\lambda) = p\,p^{-1}u(t-\lambda) \\ &= p\int_0^t u(\tau-\lambda)\,d\tau = p\int_\lambda^t u(\tau-\lambda)\,d\tau \\ &= p\int_0^{t-\lambda} u(\tau)\,d\tau = p\,(t-\lambda)u(t-\lambda) \\ &= p^2p^{-1}(t-\lambda)u(t-\lambda) \\ &= p^2\int_0^t(\tau-\lambda)u(\tau-\lambda)\,d\tau \\ &= p^2\frac{1}{2}(t-\lambda)^2u(t-\lambda) \end{aligned} \tag{5.4}$$

と変形することができる。最後の式は λ に関して滑らかな関数なので、この式を λ に関して微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda}\gamma^\lambda\mathbf{1} &= \frac{\partial}{\partial\lambda}p^2\frac{1}{2}(t-\lambda)^2u(t-\lambda) \\ &= p^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{2}(t-\lambda)^2u(t-\lambda) \\ &= -p^2(t-\lambda)u(t-\lambda) \\ &= (-p)\,p\,(t-\lambda)u(t-\lambda) = -p\gamma^\lambda\mathbf{1} \end{aligned} \tag{5.5}$$

となるので、移動演算子 γ^{λ} に対して

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\gamma^{\lambda} = -p\gamma^{\lambda} \tag{5.6}$$

という微分方程式が成立する。また、$\gamma^{0}=1$　（この１は単位演算子）なので、この微分方程式の解は演算子に関する指数関数 $e^{-\lambda p}$ と見なすことができる。つまり移動演算子は指数関数ということになり

$$\gamma^{\lambda} = e^{-\lambda p} \tag{5.7}$$

$$e^{-\lambda p} f(t) = f(t-\lambda)u(t-\lambda) \tag{5.8}$$

と書き表すことができる。ここで時間関数 $f(t)$ が定数であれば

$$e^{-\lambda p}\mathbf{1} = u(t-\lambda) \tag{5.9}$$

となり、$\lambda=0$　とすれば、再び式（3.7）が得られる。

Dirac のデルタ関数 $\delta(t-\lambda)$ は式 (5.9) で与えられる λ だけ時間がずれた Heaviside の単位階段関数の微分で定義できるので

$$\begin{aligned}\delta(t-\lambda) &= \frac{d\,u(t-\lambda)}{d\,t}\\ &= pu(t-\lambda) - pu(0-\lambda)\mathbf{1}\\ &= pu(t-\lambda) = pe^{-\lambda p}\mathbf{1}\end{aligned} \tag{5.10}$$

となり、$\lambda=0$　とすれば、

$$\delta(t) = p\mathbf{1} \tag{5.11}$$

が得られる。

６．積分変換との関係

先に定義した演算子に関する指数関数を使うと、時間関数に対応する演算子関数と時間関数の Laplace 変換との関係（演算子表示と Heaviside 変換との関係）を求めることができる。式（5.9）の両辺に $f(\lambda)$ を掛け、それをパラメータ λ で 0 から μ まで積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\mu} f(\lambda)e^{-\lambda p}d\lambda\mathbf{1} &= \int_0^{\mu} f(\lambda)e^{-\lambda p}u(t)\,d\lambda\\ &= \int_0^{\mu} f(\lambda)u(t-\lambda)\,d\lambda\\ &= \int_0^{t} g(\lambda;\mu)\,d\lambda = p^{-1}g(t;\mu)\end{aligned} \tag{6.1}$$

と書くことができる。ここで $g(t;\mu)$ は

$$\begin{aligned}&g(t;\mu) = f(t) \qquad for \quad 0<t<\mu,\\ &g(t;\mu) = 0 \qquad for \quad 0<\mu<t\end{aligned} \tag{6.2}$$

という関数なので、パラメータ μ を無限大に持っていくと

$$\lim_{\mu\to\infty} g(t;\mu) = f(t) \tag{6.3}$$

となる。従って

$$\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda p}d\lambda\mathbf{1} = p^{-1}f(t) \tag{6.4}$$

が成立する。つまり

$$\begin{aligned}f(t) &= p\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}d\lambda\mathbf{1}\\ &= p\left[\tilde{L}\{f(t)\}\right]_{s\Rightarrow p}\mathbf{1}\\ &= \left[\tilde{H}\{f(t)\}\right]_{\bar{p}\Rightarrow p}\mathbf{1}\end{aligned} \tag{6.5}$$

と表すことができる。ここで s および $\bar{p}$ は複素数で、

$$\begin{aligned}&\tilde{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,\\ &\tilde{H}\{f(t)\} = \bar{p}\int_0^{\infty} f(t)e^{-\bar{p}t}dt\end{aligned} \tag{6.6}$$

を表し、それぞれ、第１式は Laplace 変換、第２式は Heaviside 変換または第二種 Laplace 変換と呼ばれる積分変換である。注意すべきことは、ここで議論している Heaviside の演算子法で使用するのはあくまでも有限積分なので、式（6.6）における無限積分の存在は必ずしも要求していない。

この第二種 Laplace 変換つまり Heaviside 変換に基づいた演算操作を Heaviside の演算子法と称している場合が多いが、それは数学的には Laplace 変換に基づいた方法と全く同等であることは式（6.6）を見れば明らかである。

７．合成積

時間関数 $f(t)$ および $g(t)$ に対応する演算子関数をそれぞれ $F(p)$ と $G(p)$ とする。つまり

$$\begin{aligned}&pF(p)\mathbf{1} = p\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}d\lambda\mathbf{1} = f(t),\\ &pG(p)\mathbf{1} = p\int_0^{\infty} g(\lambda)e^{-p\lambda}d\lambda\,\mathbf{1} = g(t)\end{aligned} \tag{7.1}$$

である場合に、二つの演算子関数の積である演算子関数に対応する時間関数はそれぞれの演算子関数に対応する時間関数の合成積になる。つまり、次式に示すように移動演算子の定義式を使って変形すると

$$\begin{aligned}p\,F(p)G(p)\mathbf{1} &= F(p)\,pG(p)\mathbf{1}\\ &= \frac{1}{p}\,pF(p)\,g(t)\\ &= \frac{1}{p}\,p\int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}d\lambda\,g(t)\\ &= \int_0^{\infty} f(\lambda)e^{-p\lambda}g(t)\,d\lambda\\ &= \int_0^{\infty} f(\lambda)\,g(t-\lambda)u(t-\lambda)\,d\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t f(\lambda)\, g(t-\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \; = f(t) * g(t)
\end{aligned}
\qquad (7.2)
$$

となり、最後の等式は合成積の定義式である。ここで、時間関数 $g(t)$ に対する演算子関数 $G(p)$ の具体的な表式が得られていない場合にも、上式の 2 番目の等号以降の等式は有効であることは注目するに値する。

８．各種の演算公式

時間関数 $f(t)$ に対応する演算子関数を $F(p)$ とする。つまり

$$
pF(p)\mathbf{1} = p\int_0^\infty f(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda \mathbf{1} = f(t) \qquad (8.1)
$$

の関係があるとする。このとき、式（5.8）を

$$
e^{-\tau p} pF(p)\mathbf{1} = f(t-\tau) u(t-\tau) = e^{-\tau p} f(t) \qquad (8.2)
$$

と書き直せば、移動演算子 $e^{-\tau p}$ を演算するということは、対応する時間関数についてはその時間を τ だけずらす演算操作だと見なすことができる。これを移動演算、または変時演算と名付ける。逆に、演算子関数内の演算子 p を α だけずらす演算を変位演算 $\hat{T}^\alpha$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\hat{T}^\alpha pF(p)\mathbf{1} &= pF(p-\alpha)\mathbf{1} = p\int_0^\infty f(\lambda) e^{-(p-\alpha)\lambda} d\lambda \mathbf{1} \\
&= p\int_0^\infty e^{\alpha\lambda} f(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda \mathbf{1} \\
&= e^{\alpha t} f(t) = \hat{T}^\alpha f(t)
\end{aligned}
\qquad (8.3)
$$

が成立する。つまり、演算子関数に変位演算 $\hat{T}^\alpha$ を演算するということはその時間関数に $e^{\alpha t}$ を掛ける事を意味する。同様に、演算子関数内の演算子 p を a 倍にする操作を相似演算 $\hat{S}(a)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(a) pF(p)\mathbf{1} &= pF(ap)\mathbf{1} = p\int_0^\infty f(\lambda) e^{-ap\lambda} d\lambda \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{a} p\int_0^\infty f\left(\frac{a\lambda}{a}\right) e^{-pa\lambda} da\lambda \mathbf{1} \\
&= \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right) = \hat{S}(a) f(t)
\end{aligned}
\qquad (8.4)
$$

が成立する。また、演算子関数を演算子 p で微分する操作を微分演算 $\hat{D}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\hat{D}^n pF(p)\mathbf{1} &= p\left[\frac{d^n}{d\bar{p}^n} F(\bar{p})\right]_{\bar{p}=p} \mathbf{1} \\
&= p\left[\frac{d^n}{d\bar{p}^n} \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\bar{p}\lambda} d\lambda\right]_{\bar{p}=p} \mathbf{1} \\
&= p\left[\int_0^\infty f(\lambda) \frac{d^n e^{-\bar{p}\lambda}}{d\bar{p}^n}\right]_{\bar{p}=p} d\lambda \mathbf{1} \\
&= p\int_0^\infty (-\lambda)^n f(\lambda) e^{-p\lambda} d\lambda \mathbf{1} \\
&= (-t)^n f(t) = \hat{D}^n f(t)
\end{aligned}
\qquad (8.5)
$$

となる。さらに、演算子関数を演算子 p で積分する操作を微分演算 $\hat{I}$ とすると

$$
\begin{aligned}
\hat{I}^n pF(p)\mathbf{1} &= p\left[\int_{\bar{p}}^\infty \int_{\bar{p}_1}^\infty \cdots \int_{\bar{p}_{n-1}}^\infty F(\bar{p}_n) d\bar{p}_n \cdots d\bar{p}_2 d\bar{p}_1\right]_{\bar{p}=p} \mathbf{1} \\
&= p\left[\int_{\bar{p}}^\infty \int_{\bar{p}_1}^\infty \cdots \int_{\bar{p}_{n-1}}^\infty \left\{\int_0^\infty f(\lambda) e^{-\bar{p}_n\lambda} d\lambda\right\} d\bar{p}_n \cdots d\bar{p}_2 d\bar{p}_1\right]_{\bar{p}=p} \mathbf{1} \\
&= p\int_0^\infty \frac{f(\lambda)}{\lambda^n} e^{-p\lambda} d\lambda \mathbf{1} = \frac{f(t)}{t^n} = \hat{I}^n f(t)
\end{aligned}
\qquad (8.6)
$$

となる。つまり演算子関数に対する微分・積分はそれぞれ、対応する時間関数を $(-t)$ 倍したり、t で割ったりすることに対応する。

おわりに

以上、Heaviside の演算子法の基本的性質について議論してきた。演算子関数が有理型ではない場合への適用など、その他の場合への展開や応用については各自で考察して戴きたい。

時間関数に対応する演算子関数はその時間関数の Laplace 変換と全く同じ形をしており、違いは複素数 s が演算子 p になっているだけである。但し、Heaviside の演算子 p は時間関数に演算する演算子なので、演算子の関数式の右には必ず演算される時間関数の項（多くの場合には $\mathbf{1}$ ）がなければならない。

Heaviside の演算子法の場合、Laplace 変換で扱える問題はすべて扱え、式（6.6）の積分が必ずしも収束する必要がない分だけ Laplace 変換の方法よりも適用範囲が広いし、その中に積分変換という概念が入らない分だけ考え方が単純だと云える。このことは Laplace 変換の教科書に載っている演習問題を、この Heaviside の演算子法で解いてみることによって実感して欲しい。しかし、実際の問題で式（6.6）の積分が収束しない場合を扱うことは殆どないし、信号処理などの分野で演算子関数をより有効に適用できる形に発展させるには、演算子 p を普通の数と考え、積分変換の概念を導入した方が遥かに理解しやすい。従って、どちらの方法が便利かは扱う問題と各人の好み次第ということになるだろう。

※ 文献の引用がないのは、全てが私のオリジナルということではなく、私の勉強不足により、オリジナルの文献を特定できなかったことによるので、こちらの方もご容赦願いたい。